Teoretická část - 21.6.2021

1. (a) Definujte parciální derivace (včetně derivací vyšších řádů) a totální diferenciál (2 body).

   (b) Zformulujte větu o střední hodnotě (1 bod).

   (c) Zformulujte a dokažte větu o vztahu parciálních derivací a totálního diferenciálu (důkaz stačí pro první část) (3 body).

   (d) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. je-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce, pro kterou $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-5)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,-5)$ existují, potom existuje $df(-1,-5)$,

      ii. je-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce, pro kterou existuje $df(a)$ pro všechna $a \in \mathbb{R}^2$ a navíc je zobrazení $a \mapsto df(a)$ spojité, potom existují $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, $a \in \mathbb{R}^2$, a navíc jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojité na $\mathbb{R}^2$.

   Vše řádně zdůvodněte (2 body).

2. (a) Definujte Cauchyův součin řad $(1,5$ bodu).
   (b) Zformulujte a dokažte větu o součinu řad (4 body).
   (c) Pomocí věty o součinu řad ukažte, že pro funkci

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

platí

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$(2,5$ bodu).

3. (a) Definujte metrický prostor, úplný metrický prostor a kontraktivní zobrazení (3 body).
   (b) Zformulujte Banachovu větu o kontrakci (1 bod).
   (c) Dokažte, že zobrazení $x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(x)$ je kontrakcí na prostoru $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou (1 bod).
   (d) Dokažte následující tvrzení: nechť (M, ρ) a (X, d) jsou úplné metrické prostory, potom zobrazení

$$\phi : (M \times X) \times (M \times X) \to \mathbb{R}$$

   definované jako

$$\phi((a, x), (b, y)) = \rho(a, b) + d(x, y)$$

   je metrikou na množině $M \times X$ a prostor $(M \times X, \phi)$ je úplný metrický prostor (3 body).